IL CALCOLO LETTERALE

Perché usare le lettere quando esistono i numeri?

Perché utilizzare una scrittura letterale in matematica serve per GENERALIZZARE un procedimento di calcolo, una legge, una proprietà, in maniera che valga SEMPRE e non solo per quei numeri scelti al momento.

Es. perimetro di un triangolo di lati a,b,c: $p= a+b+c$

Proprietà commutativa dell'addizione: $a+b+c+d = d+a+b+c = c+d+a+b$

Formula velocità: $v= S/t$ (spazio diviso tempo)

Quindi data un'**espressione algebrica** (scrittura con lettere e numeri o solo lettere), per calcolare il **valore numerico** basta sostituire a ciascuna lettera il valore assegnato ed eseguire i calcoli.

Ps. Ci sono dei valori che NON vanno bene come:
-quelli che annullano un denominatore
- Quelli che rendono negativo il numero sotto radice (radicando).

I monomi

I MONOMI

MONOMIO: è un espressione letterale algebrica formata da:
- solo un numero (il monomio si chiama <u>costante</u>)
- una lettera o prodotto di lettere
- prodotto tra numeri e lettere

Quindi <u>NON deve contenere addizioni o sottrazioni</u>.

$$-7a^3b, \quad +\frac{7}{4}ab^2, \quad \frac{5ab}{c^2}$$

Si può identificare una parte numerica (***coefficiente***) ed una ***parte letterale***.

$$\underbrace{\frac{7}{5}}_{\text{coefficiente}}\underbrace{ab^2c}_{\text{parte letterale}}$$

Un monomio può essere :

INTERO
(le lettere compaiono solo al numeratore)
o al denominatore con esponente negativo.

FRAZIONARIO
(le lettere compaiono al denominatore),
o al numeratore con esponente negativo.

$\frac{5}{8}abc^3$
monomio intero

$-7\frac{abc}{d}$
monomio frazionario

I MONOMI- forma normale

FORMA NORMALE di un monomio: se compare il prodotto del coefficiente e una o più lettere diverse tra loro.

$$-2a\left(-\frac{5}{4}\right)ab^3(+2)ba^4 \longrightarrow 5a^6b^4.$$

Compare la a tre volte, la b due volte e tre coefficienti numerici.
Quindi ci son dei calcoli da far per ridurlo in forma normale

Ora compare solo un coefficiente numerico e prodotti di lettere distinte-diverse.

$$-2a^3b^2 4a3a^2b \longrightarrow -24a^6b^3$$

$$-2(4)(3)(a^3a^1a^2)(b^2b) = -24\,a^{3+1+2}b^{2+1}$$

I MONOMI- tipi

I MONOMI POSSONO ESSERE

SIMILI
se hanno la stessa parte letterale

$-\frac{3}{2}a^2b^3c$

$+2a^2b^3c$

UGUALI
se hanno la stessa parte letterale e lo stesso numero

$-\frac{2}{5}a^2b$

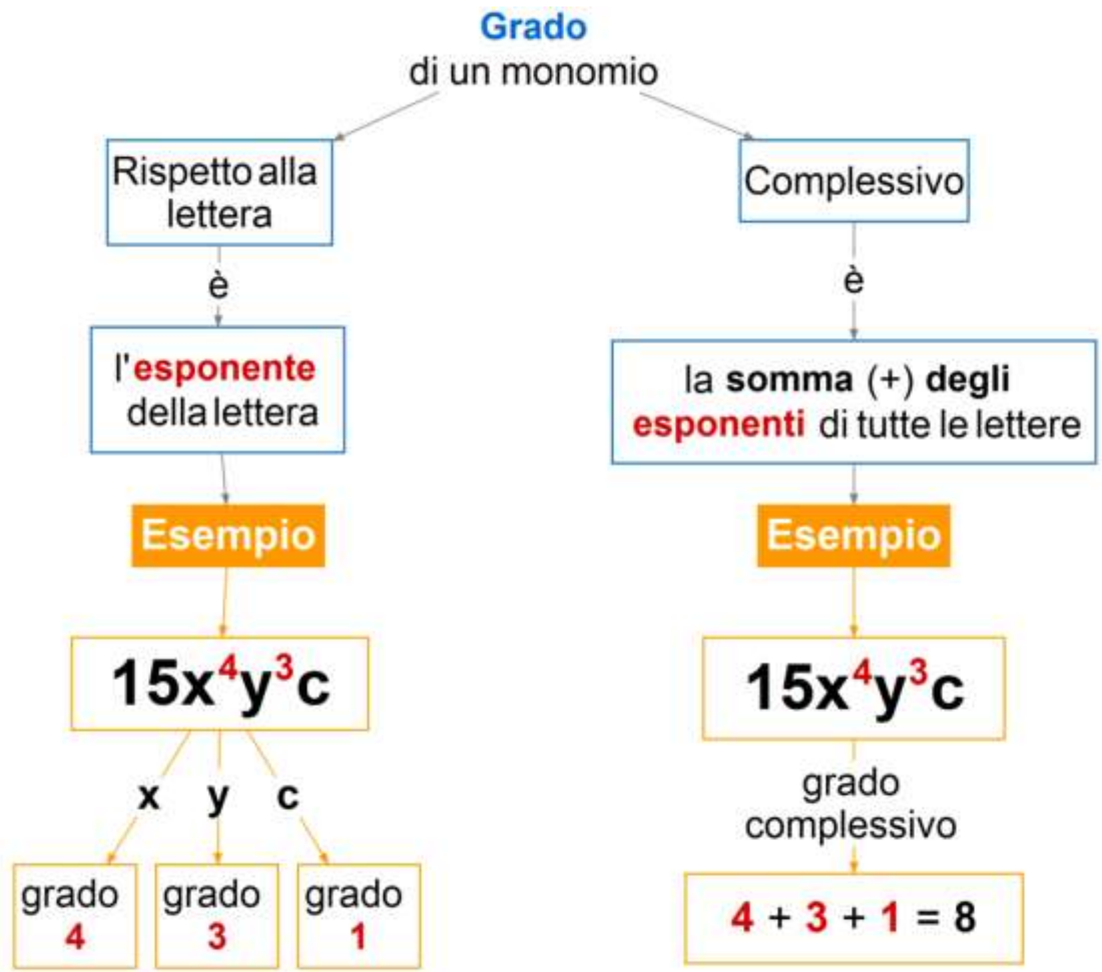
$-\frac{2}{5}a^2b$

OPPOSTI
se hanno la stessa parte letterale e lo stesso numero MA i segni sono opposti

$+\frac{4}{3}a^2b$

$-\frac{4}{3}a^2b$

I MONOMI- il grado



Se non compare una lettera, il grado rispetto a quella lettera è 0

I MONOMI – addizione algebrica

In una serie di addizioni e sottrazioni tra monomi (senza moltiplicazioni e divisioni) si possono presentare due casi:

1) Non ci sono monomi simili ➔ la somma si lascia indicata

$$5ab + (-2a) = 5ab - 2a$$

2) Ci sono monomi simili ➔ si fa la somma o differenza dei coefficienti dei monomi simili e si ricopia la parte letterale
(***si raccoglie a fattor comune, si riducono i termini simili***)

$$-4ab + \frac{1}{2}ab^2 - 7ab - ab^2 + 3ab =$$

$$= (-4 - 7 + 3)ab + \left(\frac{1}{2} - 1\right)ab^2 =$$

$$= -8ab - \frac{1}{2}ab^2$$

I MONOMI – moltiplicazione

- Il prodotto di due o più monomi è un monomio che ha:

  -per coefficiente il prodotto dei coefficienti
  - per parte letterale tutte le lettere che compaiono prese una sola volta con esponente la somma degli esponenti (***proprietà delle potenze***)

$$4ab^2 \cdot (-5a^2bc) = 4 \cdot (-5)ab^2a^2bc = -20a^{1+2}b^{2+1}c = \mathbf{-20a^3b^3c}$$

$$\left(-\frac{3}{4}a^2bc\right) \cdot \left(\frac{4}{9}abc^3\right) = -\frac{1}{3}a^{2+1}b^{1+1}c^{1+3} = \mathbf{-\frac{1}{3}a^3b^2c^4}$$

I MONOMI – divisione

Il quoziente di due monomi è un monomio che ha:

- -Per coefficiente il <u>quoziente dei coefficienti</u>
- per parte letterale tutte le lettere che compaiono nel dividendo con esponente la <u>differenza degli esponenti</u> (***proprietà delle potenze***)

$$(21a^3b^4) : (-7ab^2) = -3a^2b^2$$

$$\left(-\frac{6}{5}a^4b^3\right) : \left(+\frac{3}{4}ab^2\right) = \left(-\frac{6}{5}\right) \cdot \left(+\frac{4}{3}\right) a^{4-1}b^{3-2} = -\frac{8}{5}a^3b$$

Due monomi sono **DIVISIBILI** se nel primo monomio (dividendo) compaiono tutte le lettere del secondo (divisore) con esponenti maggiori o uguali.

Altrimenti se **NON DIVISIBILI** comparirà un esponente negativo.

$$\left(\frac{6}{5}a^4b^2c\right) : \left(-\frac{2}{7}a^2b^3c^5\right) = \left(\frac{6}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) a^{4-2}b^{2-3}c^{1-5} = -\frac{21}{5}a^2b^{-1}c^{-4} =$$

ricordando il significato di potenza con esponente negativo

$$= -\frac{21a^2}{5bc^4}$$

I MONOMI – potenza

La potenza di un monomio è un monomio che ha:

- Per coefficiente la <u>potenza del coefficiente</u>
- per parte letterale tutte le lettere che compaiono con esponente <u>il prodotto degli esponenti</u> (***proprietà delle potenze***)

$$(-5a^2b)^3 = (-5a^2b)(-5a^2b)(-5a^2b) = \mathbf{-125a^6b^3}$$

$$\left(-\frac{3}{4}a^2b^3\right)^3 = -\frac{27}{64}a^6b^9$$

Poni attenzione alle seguenti scritture perché assumono un diverso significato: $(-ab)^2$ significa $(-ab)\cdot(-ab) = +a^2b^2$, mentre $-(ab)^2$ vuol dire $-(ab)\cdot(ab) = -a^2b^2$.

I MONOMI – operazioni ripasso

SOMMA ALGEBRICA

$3ab + 5\,ab - 9\,ab + 7\,ab - 2\,ab =$
$(3 + 5 - 9 + 7 - 2)ab = \ +\mathbf{4\,ab}$

è un monomio <u>uguale</u> a quelli dati, avente come coefficiente la somma algebrica dei coefficienti dati.

$3xy - 6x^2 + 9\,xy - 10xy + 4x^2 =$
$(3 + 9 - 10)xy + (-6 + 4)x^2 =$
$\mathbf{+2\,xy - 2x^2}$

PRODOTTO

$(+2ab) \times (-ab^2) \times (-3a^2b) = \ \mathbf{+6a^4b^4}$

è un monomio che ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale la somma degli esponenti delle lettere uguali.
$(+2 \times -1 \times -3) = +6$ $\quad (a^1 \times a^1 \times a^2 = a^4)$ $\quad (b^1 \times b^2 \times b^1 = b^4)$

DIVISIONE

$(+10\,ab^3) : (-5\,b^2) = \ \mathbf{-2ab}$

è un monomio che ha per coefficiente la divisione dei coefficienti e per parte letterale la sottrazione degli esponenti delle lettere uguali.
$(+10 : -5) = -2$ $\quad (a^1 : a^0 = a^1)$ $\quad (b^3 : b^2 = b^1)$

POTENZA

$(+3xy^2)^3 = \ \mathbf{+27x^3y^6}$

è un monomio che ha per coefficiente la potenza del coefficiente e per parte letterale il prodotto degli esponenti delle lettere per l'esponente della potenza.
$(+3)^3 = +27$ $\quad (x^1)^3 = x^{1x3} = x^3$ $\quad (y^2)^3 = y^{2x3} = y^6$

I polinomi

I POLINOMI

POLINOMIO: somma algebrica di due o più monomi (non simili).

Un polinomio con due, tre quattro termini si chiama rispettivamente: *binomio, trinomio, quadrinomio*….

Termini

$$\underbrace{2ab^2 - \frac{1}{3}ab + 5a - 1}_{\text{Polinomio}}$$

La somma algebrica dei monomi forma un polinomio.

Un polinomio può essere :

INTERO
(Se tutti i termini sono monomi interi)

FRAZIONARIO
(se <u>almeno</u> uno dei termini è monomio frazionario)

- $-9ab^2 + \frac{2}{3}ab - a^2b^2$ **polinomio intero**
- $\frac{3}{5}ab^2 + \frac{3a}{b^2} - \frac{7}{ab}$ **polinomio frazionario**

I POLINOMI- il grado

- Il **GRADO DI UN POLINOMIO** o **grado complessivo** è il maggiore dei gradi dei suoi termini.

  Quindi devo pensare: quale monomio del polinomio ha grado maggiore e qual'è questo grado?

$$a^5b + 2a^2b - 6a^3b^4.$$

Nel nostro esempio si ha:

$$\underbrace{a^5b}_{5+1=6} \quad + \underbrace{2a^2b}_{2+1=3} \quad - \underbrace{6a^3b^4}_{3+4=7}$$

Quindi il polinomio dato è di grado 7.

Il **GRADO RISPETTO AD UNA LETTERA** è <u>l'esponente maggiore</u> con cui quella lettera figura nel polinomio,

$$a^5b + 2a^2b - 6a^3b^4.$$

Grado rispetto alla lettera a è 5
Rispetto alla lettera b è 4

I POLINOMI- ordinati, omogenei, completi

POLINOMIO OMOGENEO: se tutti i termini hanno lo stesso grado

$2a^2b^3 - 6ab^4 + 3a^5$ è un polinomio omogeneo perché ogni termine è di grado 5;

POLINOMIO ORDINATO: se i termini si susseguono in modo che gli esponenti di una certa lettera sono in ordine crescente o decrescente.

$5a^2 + 3a^3 - 9a^5$ è un polinomio ordinato secondo le potenze crescenti della lettera a;
$2a^4 - 6a^3 + 4a - 3$ è un polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera a;
$4ab^3 - 2a^2b^2 + a^3b$ è un polinomio ordinato secondo le potenze crescenti della lettera a e decrescenti della lettera b;

POLINOMIO COMPLETO: un polinomio è completo rispetto ad una lettera se quella lettera compare con tutte le potenze (dal grado massimo a grado zero).

$5x^3 - 8x^2 - x + 2$ è un polinomio completo rispetto alla lettera x perché ci sono tutte le potenze di x dal grado 3 al grado zero. Ricorda che $2 = 2x^0$. Il termine $+ 2$ si chiama **termine noto**.

OPERAZIONI CON I POLINOMI – addizione algebrica

La **somma di due polinomi** si ottiene scrivendo uno di seguito all'altro i loro termini, ciascuno con il proprio segno, ed eseguendo la riduzione degli eventuali termini simili.

$$(5a - 3b + c) + (-7a + 9b + 2c).$$

$5a - 3b + c - 7a + 9b + 2c =$	si eliminano le parentesi tralasciando il segno "+" dell'addizione
$= \underline{5a} - \underline{\underline{3b}} + \underline{\underline{\underline{c}}} - \underline{7a} + \underline{\underline{9b}} + \underline{\underline{\underline{2c}}} =$	si riducono i termini simili usando uno stesso simbolo per contrassegnarli
$= (5 - 7)a + (-3 + 9)b + (1 + 2)c =$ si scrive sempre il segno +	si raccolgono in parentesi i coefficienti dei termini simili e si scrive tra una parentesi e l'altra sempre il segno +
$= -2a + 6b + 3c$	$-2a + 6b + 3c$ è la somma dei polinomi dati

La **differenza di due polinomi** si ottiene scrivendo i termini del minuendo, ciascuno con il proprio segno e, di seguito a essi, quelli del sottraendo con i segni cambiati ed eseguendo la riduzione degli eventuali termini simili.

$$(5a - 3b + c) - (-7a + 9b + 2c).$$

$5a - 3b + c + 7a - 9b - 2c =$	si eliminano le parentesi e si **cambia il segno a tutti i termini** della seconda parentesi
$= \underline{5a} - \underline{\underline{3b}} + \underline{\underline{\underline{c}}} + \underline{7a} - \underline{\underline{9b}} - \underline{\underline{\underline{2c}}} =$	si riducono i termini simili usando uno stesso simbolo per contrassegnarli
$= (5 + 7)a + (-3 - 9)b + (1 - 2)c =$ si scrive sempre il segno +	si raccolgono in parentesi i coefficienti dei termini simili e si scrive tra una parentesi e l'altra sempre il segno +
$= 12a - 12b - c$	$12a - 12b - c$ è la differenza dei polinomi dati

OPERAZIONI CON I POLINOMI – moltiplicazione di monomio per polinomio

Il **prodotto di un monomio per un polinomio** è il polinomio che si ottiene moltiplicando il monomio per ciascun termine del polinomio.

$-5ab^2 \cdot (-2a + 4b - 3c)$

si applica la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione algebrica. Quindi si ha:

$$\mathbf{-5ab^2} \cdot (-2a + 4b - 3c) =$$

$$= \mathbf{-5ab^2} \cdot (-2a) \mathbf{- 5ab^2} \cdot (+4b) \mathbf{- 5ab^2} \cdot (-3c) = 10a^2b^2 - 20ab^3 + 15ab^2c$$

OPERAZIONI CON I POLINOMI – moltiplicazione di polinomi

Il **prodotto di due polinomi** è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo.

$$(2x - 3y) \quad \cdot \quad (4x^2 + 2y^3)$$

si applica due volte la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione algebrica.

$(\mathbf{2x} - \mathbf{3y}) \cdot (4x^2 + 2y^3) =$
$= \mathbf{2x} \cdot (4x^2 + 2y^3) - \mathbf{3y} \cdot (4x^2 + 2y^3) =$
$= 8x^3 + 4xy^3 - 12x^2y - 6y^4$

Vediamo un esempio in cui i polinomi da moltiplicare sono tre:
$(-4a + 5b) \cdot (2a + 3b) \cdot (a - 2b) =$
$= (-8a^2 - 12\underline{ab} + 10\underline{ab} + 15b^2) \cdot (a - 2b) = (-8a^2 - 2ab + 15b^2) \cdot (a - 2b) =$
$= -8a^3 + 16\underline{a^2b} - 2\underline{a^2b} + 4\underline{\underline{ab^2}} + 15\underline{\underline{ab^2}} - 30b^3 = -8a^3 + 14a^2b + 19ab^2 - 30b^3$

OPERAZIONI CON I POLINOMI – divisione di polinomio per monomio

Per **dividere un polinomio per un monomio** si divide ciascun termine del polinomio per il monomio e si sommano poi i quozienti così ottenuti.

$$(10a^2 - 6a^3 + 8a^4) : (\mathbf{-2a}) =$$

$$= 10a^2 : (\mathbf{-2a}) + (-6a^3) : (\mathbf{-2a}) + (+8a^4) : (\mathbf{-2a}) = -5a + 3a^2 - 4a^3$$

si scrive sempre il segno +

$$\left(-\frac{5}{6}a^2b^3c + \frac{3}{4}ab^2c^2\right) : \left(-\frac{3}{2}abc\right) = \mathbf{\frac{5}{9}ab^2 - \frac{1}{2}bc}$$

OPERAZIONI CON I POLINOMI – i prodotti notevoli

I **prodotti notevoli** sono alcune <u>moltiplicazioni</u> <u>particolari</u> tra polinomi che possono essere risolti rapidamente senza effettuare troppi calcoli:

1) <u>Prodotto della SOMMA di due monomi PER la loro DIFFERENZA</u>

$$\underbrace{\boxed{(3a+4b)}}_{\text{somma}} \cdot \underbrace{\boxed{(3a-4b)}}_{\text{differenza}} = 9a^2 - \cancel{12ab} + \cancel{12ab} - 16b^2 = 9a^2 - 16b^2$$

Quadrato del primo – quadrato del secondo

Il **prodotto** della **somma** di due monomi **per la** loro **differenza** è uguale alla differenza fra il quadrato del primo monomio e il quadrato del secondo monomio.

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Quadrato del primo – quadrato del secondo

OPERAZIONI CON I POLINOMI - i prodotti notevoli

2) <u>Quadrato di binomio</u>

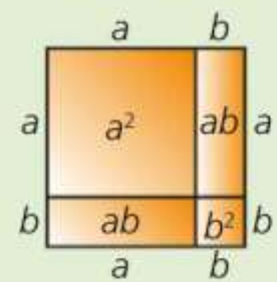
Calcoliamo il quadrato del binomio $2a + 3b$, ricordando la definizione di potenza:

$$(2a + 3b)^2 = (2a + 3b) \cdot (2a + 3b) = 4a^2 + \underline{6ab} + \underline{6ab} + 9b^2 = \mathbf{4a^2 + 12ab + 9b^2}$$

il **quadrato di un binomio** è un trinomio i cui termini sono:
- il quadrato del primo monomio;
- il doppio prodotto del primo monomio per il secondo;
- il quadrato del secondo monomio.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

La formula
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
si può interpretare geometricamente:



OPERAZIONI CON I POLINOMI - i prodotti notevoli

3) <u>Cubo di binomio</u>

Per calcolare $(a + b)^3$, ricordiamo la proprietà delle potenze con la stessa base e scriviamo:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + \underline{a^2b} + 2\underline{a^2b} + 2\underline{\underline{ab^2}} + \underline{\underline{ab^2}} + b^3 =$$

$$= \boldsymbol{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

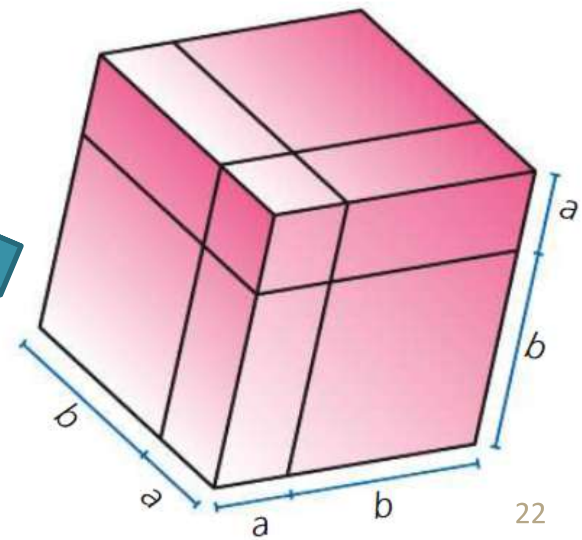
Notiamo che il risultato è formato da quattro termini:

- a^3 che è il cubo del primo monomio, cioè $(a)^3$;
- $3a^2b$ che è il triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo monomio, cioè $3 \cdot (a)^2 \cdot (b)$;
- $3ab^2$ che è il triplo prodotto del primo monomio per il quadrato del secondo monomio, cioè $3 \cdot a \cdot (b)^2$;
- b^3 che è il cubo del secondo monomio, cioè $(b)^3$.

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a + b)^2 \, (a + b)$$

Area della faccia spessore



ESPRESSIONI CON MONOMI E POLINOMI

- Valgono le regole di tutte le espressioni:

  Unica accortezza è <u>eseguire le moltiplicazioni</u>,
  individuando i <u>prodotti notevoli</u>
  e poi alla fine <u>ridurre i termini simili</u>

1. $3a(2a-b)-2b(4a-3b)+(a+2b)(a-2b)=$

$=6\underline{a^2}-3\underline{\underline{ab}}-8\underline{\underline{ab}}+6\underline{\underline{\underline{b^2}}}+\underline{a^2}-4\underline{\underline{\underline{b^2}}}=7a^2-11ab+2b^2$

Prima si eseguono le moltiplicazioni, individuando gli eventuali prodotti notevoli, e poi si riducono i termini simili.

2. $[(15a^3b^2-12a^4b^3):(-3a^2b^2)+(2a+b)^2-b(b+4a^2)]:(-2a)=$

$=[-5a+\cancel{4a^2b}+4a^2+4ab+\cancel{b^2}-\cancel{b^2}-\cancel{4a^2b}]:(-2a)=\dfrac{5}{2}-2a-2b$

Prima si eseguono le operazioni delle parentesi tonde e dopo quelle delle parentesi quadre.